佛教大学　仏教学部論集　第95号（2011年３月）

射影幾何学とカント空間

田　山　令　史

〔抄　録〕

この論文では、カントの空間論と視覚論、透視図法論との関連を探る。カント空間については、ライプニッツやニュートンと比較することが一般的であるが、ここでは従来、この空間と関係づけられなかった問題を、いくつか取り上げる。射影幾何学は視覚論や透視図法論と関連し、哲学の問題をはらんでいる。しかし、カント哲学で取り上げられることはまれである。射影幾何学とカント空間の関わりを示すとともに、この幾何学が、近代の認識論や存在論と関係する様子を描く。

キーワード　デザルグ、視覚論、視点、デカルト、アルハセン

序

以前、「透視図法とカント空間」(1)で、ピエロ・デッラ・フランチェスカ（Piero della Francesca, 1412–1492）の透視図法論を中心に、この絵画の技法が射影幾何学につながるまでの過程を論じた。ピエロの技法論はベネデッティ（Giovanni Battista Benedetti, 1530–1590）を経て、デザルグ（Girard Desargues, 1591–1661）に至り、射影幾何学の基礎が築かれるのである。ここではまず、時代をさかのぼり、ルネサンス期以前、中世の視覚論を取り上げたい。

視覚論と幾何学の関わりは、ユークリッド（Euclid, c. 300B. C.）『視覚論』から始まる。ユークリッドは視線を幾何学的直線としながら、視点とさまざまな図形との関係を分析していく。この『視覚論』は時代を通じて議論の基礎となる。

プラトン『ティマイオス』とユークリッドに由来する視覚論は、八世紀から十三世紀のアラビア文化において飛躍する。なかでも、アルハセン（Alhacen, c. 965–1040）の仕事が大切であり、彼の議論は西洋中世の視覚論を決定づけた。たとえば、ロジャー・ベイコン（R. Bacon, c. 1220–1292）の『大著作（*Opus Majus*）』第五部である視覚論は、アルハセンを中心に、プラトンやユークリッドの議論を丁寧に敷衍したもので、後世に強い影響を与える。アルハセンの視覚論を、中世西洋での影響を念頭に検討し、光学を視覚論から分岐させるケプラー

（Johannes Kepler, 1571-1630）、そして近代の視覚論を完成させるデカルト（René Descartes, 1596-1650）まで、概観する。

視覚を考えるとき、空間が隔てる私と対象を関係づけながら、光の性質、眼の働き、脳の役割などを問う。哲学は主観と客観の関わりを、もっとも具体的な形で描く視覚論に魅入られてきたのである。デカルトの観念論は視覚論によって具体的に表現される。デカルトを論駁するカントの観念論は、この論駁を通じて、視覚論の型を踏まえることになる。

ルネサンス期の視覚論は、ピエロ・デッラ・フランチェスカ『絵画の透視図法論』に取り込まれる。そして、視点と対象の関係を描くこの透視図法論から、デザルグを経て射影幾何学が生まれる。この射影空間では、透視図法の消点に由来する中心点が、対象間の関係を成り立たせている。19世紀に完成する射影幾何学を念頭に、射影幾何学の基礎である配景変換が空間論に対して持つ意味を考える。そしてカント空間は、この射影空間で表現されていることを確かめたい。

1　視覚論の流れ

a　光の流出説

ギリシャの哲学や自然科学の多くは、12世紀になってから、アラビア文化圏を通じて西洋に入った。この世紀はユークリッド『原論』も含めて、アラビア語からラテン語への翻訳が盛んであり、今は、この翻訳による西洋の文化的離陸が「12世紀ルネサンス」と呼ばれるようになった。ユークリッドの『視覚論、*Optica*』（c. 300B. C.）は、この時期、ギリシャ語からラテン語へ直接、翻訳され、長い時代を通じて影響を与え続けた。

この *Optica* 出だしの部分を見ておく。まず七つの定義、続いて六十四の命題がある。この定義を、『アラビア版視覚論』の英訳、*The Arabic Version of Euclid's Optics* から引いてみる(2)。

1　眼から出て行く視線は直線であり、無限の大きさの直進経路を成す。
2　視線によって包まれる図形は、その頂点が眼のとなりにある（whose apex is next to the eye）錐体であり、その底面は視覚対象の外面のとなりにある（whose base is next to the extremity of the visible object）。
3　視線が落ちる対象は見られ、落ちない対象は見られない。
4　大きな視角で見られたものは大きく見える。
5　小さな視角で見られたものは小さく見える。
6　多くの視角で見られたものはより鮮明に見える。
7　等しい視角で見られたものは等しく見える(3)。

このように、ユークリッドの視角論は幾何学的であり、眼の解剖学や脳の働きは現れない。ところで、定義の一は、眼から出て行く視線を語っている。ここに、ユークリッドが今の視覚論にはない配慮をしていることが伺われる。

視覚論は、一つには、対象と見る者を隔てる空間を、どう埋めるかという問題である。すなわち、対象がどのくらい離れているか、対象はどのような形であるか、ここから隔たった対象について、このような知識はどう獲得されるのか。このとき、向こうの対象についてのあらゆる知識は、見る者から対象までとどいて、その対象から距離や形の感覚を伝える何かを必要としないか。つまり、知る能力を持った視線が対象と見る者をつないでいるのではないか。ユークリッドの視線はこのような働きを担っている。

プラトン（B. C. 427-347）がこの考えを、このように明瞭に語っている。眼から光がものに向かって一直線に出て行き、ものに当たるとその抵抗は動きとなって、身体の延長であるこの光を通じて魂に伝わる。すると「われわれが、それによって見ると言っているところの感覚（視覚）」がもたらされる。身体に宿り不死である魂は、光を通じて対象からの動きを伝えられ、視覚を生じるのである。このとき、視線は光ではあるが、対象からやってくる光線ではなく、人の精神のはたらきを担う、その意味で積極的な媒体である(4)。

ユークリッドはこの、光の流出説を採る。この流出説は十一世紀、徹底した批判に会う。

b　アルハセン―点状分析―

アルハセン（Ibn al-Haytham, ラテン名 Alhacen）はアラビア文化圏最大の科学者である。彼の『視覚論（*Kitab al-Manazir, Book of Optics*）』、このラテン語訳が十三世紀前に *De aspectibus* の題で現れる。この書が中世、そしてその後、近代まで、西洋の視覚論に与えた影響はきわめて大きい。この論文では、研究の新しい動きを念頭に論を進めるが、私が使える文献は限られている。そこで、よりどころにするアルハセンの翻訳につき、一言しておきたい。

八世紀後半から十五世紀にかけて、イスラム征服下、アラビア語で営まれた文化、この文化圏の影響力を考えれば、その考察は遅れている。視覚論を始め、アラビア科学の原典による研究、そしてラテン世界への影響の性質について、まだ研究は基礎固めをしている。アルハセンのラテン語訳についても、当時読まれていた形での研究は不十分であった。1989年、A. I. Sabra によるアラビア語原典一巻から三巻までの英訳がロンドンで出版され、状況が変わり始めた(5)。

この論文では、主に Mark　Smith による、ラテン語と英語の対訳版（第三巻まで）、*Alhacen's Theory of Visual Perception*, 2001 を使う(6)。論文が、ラテン語訳をもとにした当時の視覚論を扱うからである。Smith の翻訳は De aspectibus の写本、二十四種類に基づいている。今までの研究は主に、Friedrich Risner による1572年のラテン語版によっていた。この、アルハセンが収録された *Opticae thesaurus*(7) は、当時の読者にとって決定版となってい

たのである。しかし、この版は、従来流布していたものを恣意的に改変した点が多いことをSmith は翻訳の序文で指摘する。その上で、Sabra の原典研究と比較しながら、中世以来のラテン語訳を総合している。

アルハセンの、詳細で組織だった議論には、一つの核心がある。それは、punctiform analysis（点状分析）とも呼ばれる、対象からの眼への光の、革新的な扱い方である(8)。

古来の視覚論は、光の流入説であれ流出説であれ、向こうにある対象が、ここで視覚の対象として現れることを説明するのに、対象の「形相、forma」、「形象、species」、あるいは「類似、similitudo」が目に伝達されるとする。「形相」「類似」といった言葉が示唆するように、対象の似姿は、まとまりを持ったまま目に伝達されるのである。

光について、ユークリッドからおよそ千年後、アラビア文化圏で大きな発見があった。光が対象に当たる、すると、光は対象の各一点からあらゆる方向に向かって直線的に放射する。このことを、アル＝キンディ（Al-Kindy, c. 801–c. 873）が初めて語った。この、光の分散直進の事実をもとに、アルハセンはユークリッドの幾何学的な分析をさらに進める。

まず、光（lux）と色が視覚論の基本である。色は光に伴われて現れるが、二つは異なる存在で、ともに、太陽や星のような自ら輝く物が持つ客観的性質である。物の中の光は、その光の似像、表象（forma）を、透明な媒体のなかで複製しながら直線状に伝わっていく。媒体中の光は lux に対して、lumen と呼ばれる。このように、光は今で言う光線ではない。

アルハセンは、対象上の各々の一点を、光を表す一直線によって、対応する氷状体前部、つまり水晶体表面の一点と結ぶ。これで視覚論は大きく進展する。この、点による対象の積極的な解体は、次第に視覚論の枠組みとなる。

アルハセンにとって、水晶体は対象からもたらされる光を感受する場所である。この水晶体表面の一点 A に、対象の一点 B から光がとどく。しかし、対象上のどの一点からも無数の方向に光が直線状に放射している。当然、水晶体上の A 点には、対象上の B 点以外の点からの光もとどいている。対象は眼にその形を伝えることが出来るのだろうか。そこで、アルハセンは A 点で水晶体表面と垂直に交わるような光だけを、対象像構成に関わらせる。斜めに交わる光は働きが弱い上に、水晶体でさらに屈折するとして、無視するのである。これで、対象からの無数の光は、対象の大きさに関係なく眼のなかにとどき、感覚する器官に対して、もとの秩序のまま対象像を描くことになる(9)。

もう一つ、問題がある。水晶体表面を円とすれば、その表面への垂線群がこのまま直進を続けると眼の中、その中心で光の交差が生じるはずである。これで対象像は乱れ、かつ、上下左右の反転が起こることになる。アルハセンは視覚が生じるのは、水晶体表面ではなく、脳の共通感覚であると考える。ここにとどくまで、対象像にもとの空間的秩序を保たせるために、アルハセンはこの反転を、光が眼の中心前でうまく屈折するように考えて、回避する(10)。

アルハセンは、流出説は空回りであること、つまり、眼からでていく光は余計な仮説である

ことを強調する。そのような光も対象に接して眼に戻るとき、対象の情報を持って帰らなければならない。ならば、最初から、対象からの光が眼に入ればよいと考えるのである(11)。

この、アルハセンの視覚論は、ヴィテロやペカム等、中世の視覚論を経て、ケプラーにつながる。たとえば、ロジャー・ベイコンの『視覚論（*Perspectiva*）』（1267）は、過去の視覚論を総合しながら、アルハセンの点状分析を基礎に置く。しかし、アルハセンはそのままの形で近代につながるのではない。たとえば、ベイコンは流出説を採る。

ベイコンは「形象」、species を、virtus visva、つまり visual power「視力」、そして radii visuales、つまり visual rays「眼からの視線」として、三つの語を同じ意味に使う(12)。形象は物体的であり、霊的ではないことをベイコンは強調するが、しかし、眼は霊魂の支配する高貴な物体であり、対象は眼からの形象によって高貴にされ、そのことで対象の形象が高貴になり、視覚が生じるのである(13)。ベイコンの species は、アルハセンの視覚的な forma よりはるかに対象の似像として重い。それは視覚的性質から本質まで、対象をまるごと表現する(14)。このベイコンの思想は、アルハセンの分析が実証的であることを際だたせる。

c　ケプラーからデカルトへ

ケプラーは、アルハセンに基づく中世の視覚論を徹底させる。ユークリッドやアルハセン、その影響を受けたヴィテロは、対象からの光を水晶体前面に垂直に入るものに限るが、ケプラーは、この限定を捨て、ルネサンス期に正確になった眼球の解剖学、そしてレンズ光学を利用して、対象の一点からの光線束が網膜上で一点に集まることを示した。アルハセンが語る眼のなかにとどく光は、脳中の感覚器官にだけ対象像を示す。一方、ケプラーの光線は網膜上で集まって、現実に視認される反転像となっている(15)。

ケプラーは視覚論を網膜で終わらせる。網膜以後のできごとは「生理学者、physicists」の仕事である。視覚論は Optics とも表現されてきたが、近代では次第にこの語は光学を意味するようになる。ケプラーは、網膜像の反転に困惑しながらも、基本的に、光線と、レンズによる屈折だけから成り立つ光学を指向している。視覚という知覚の発生は視神経を含めた脳の機能として、生理学者の探求にまかされるのである。

ギリシャからアラビアを経て、西洋近代に到る視覚論史は、視覚論が光学と生理学・心理学に分かれていく歴史である。このなかで光は、対象の似姿を人の精神に向けて運ぶ働きを次第に失う。アルハセンの点状分析が次第に、対象のまとまった似姿を想定する視覚論を消していくのである。ケプラーを継ぐデカルトは、完全に似姿説を捨てる。

まず『哲学の原理』は光を、物質の円運動による遠心力から説明する。遠心力は空気のような媒体に圧力を及ぼし、この圧力は物から瞬間的に媒体を伝わって、これを受けとめる眼に、光や色という「主観的」印象を生じさせる。光と色はともに遠心力による圧力に由来し、その意味で、同一である(16)。

『屈折光学』（1637）では視覚を具体的に論じる[17]。この著作は、『気象学』『幾何学』とともに、『方法序説』が提案する、正確な知識を得る新しい方法、すなわち近代科学の一例として、序説と一緒にして出版された。『屈折光学』は視覚を補強する眼鏡や望遠鏡を新しい道具として取り上げるが、その前半は、眼球の解剖学も含めた視覚論である。

デカルトは、網膜像まではケプラーを受け入れる。が、網膜から視神経に入るとケプラーの考えとは異なって、対象像は運動に解体されて脳に運ばれる。こうなれば、網膜上の逆転像は問題にならない。この運動は脳にいる魂に直接働きかける。すると魂が対象に応ずる感覚を受けとるよう、「自然によって定められている」[18]。

しかし、この感覚はそのままでは対象の視覚にならない。たとえば、距離の視覚は、眼球の形の変化を脳が知ることに基づき、それに加えて、対象群の位置関係や形の判明度によって判断される。形についても、知性の判断が欠かせない。たとえば、円の網膜像は卵形である。この卵形から、対象としての円を推察するのである[19]。

この問題は、アルハセンがすでに取り上げており、ベイコンがさらに詳しく説明している[20]。ユークリッドのアラビア版で見た定義の 4 と 5 、対象の大きさは視角の大きさによって直ちに理解されること、このことに反対してアルハセンは、対象の距離や大きさは直接の知覚ではなく、何らかの尺度、たとえば、規則的に並んだ木の列など、これに基づく推量であると言う。アルハセンはこの点、綿密である。自分の体によって、あるいは、一つの尺度の繰り返しで距離を知ること、私たちが、このような知り方を意識せず結果に至ることなど、詳細に分析している[21]。

対象の一まとまりの似姿が、距離などの知識を伴って眼にやってくることが否定されれば、対象の大きさや距離、そして形は、ここにいる私の判断によって与えられることになる。

一方、脳の働き、すなわち、対象からの光が視神経を経て脳に送られ、そこで対象知覚が生じること、この点については、多くが同意する。ケプラーまでの視覚論を通じて、脳は一貫して、魂と対象（像）の出会う場である。そして、視覚論の入射説を完成させたデカルトの脳には、松果体という魂の居場所がある。この場所が私のいるところである。そして、視像は対象からやってくるのではなく、脳という物が産出する。このようにして、魂としての私を閉じこめた脳は、世界全体を表象にする。ここに、物と精神の堅固な二元論が現れる。

デカルトはこう語る。自分がいることは直接の経験によって知る。そして、私がじかに意識しているのは、私のうちに経験するものだけである。地面が見える、それに触れるといった経験から、地面が私の下にあることはあたり前に思われる。しかし、もっと確実なことは、地面について、今、判断している私の精神があることではないか。この判断に応じて自分の外に物体があるかどうか、これは内的経験ほどには確かでない（『哲学の原理』第一部十一）。
「私が存在すること」だけが確実で、私の外の空間に物があることは、この、じかな内的経験から推論されるだけである。すると、物の存在は、結果から原因への推論のつねとしてとして、

不確実になってしまう。

たとえば、円の網膜像、卵形から、対象としての円を推察するのであるから、判断は誤るかも知れない。判断という内的経験は必ずあるが、空間の対象については、それが判断どおりにあるかどうか、この経験だけからは言えない。が、神は人を欺かない。デカルトはこの神の誠実に訴えることで、人が物の本性とする延長とともに、対象が外にあることを確かめるのである。

近代に至って視覚論がまとった型は、次のように表現できる。

「私の外に実体である対象、つまり、それ自体として存在する物がある。この対象とその表象は、光線と視神経を介して因果関係にある。つまり、向こうの対象はここの主観に働きかけて、その表象を生むのである。魂が生む表象は、判断の上で対象の像とされるが、このような対象が存在することは、神の誠実だけが頼りである」。

デカルトの空間論が対象と私の二元論を完成する。アリストテレスの空間は地球を中心として有限であった。この空間は、軽い物は上へ、思い物は下へと運動させて、方位において性質が異なる（『自然学』第四巻、第三章)。この思想は均質な空間のなかで無限に拡がる線や平面を考えるユークリッド幾何学とは相容れない。デカルトは空間を延長する実体とする。そして、この神の第一の創造物は無際限であると考え、この均質な空間に三次元直交座標を置く。これでユークリッド空間は世界空間となるのである。

視覚論はいつも、私と対象の隔たりを問うてきたが、対象からの光線だけがこの隔たりを埋めるようになったとき、「ここ」が、均質な世界空間の特異点として現れる。私の外の空間すべては不確かで、判断する私のいることだけが確かなのである。しかし、外の対象が存在するという意味が不確かなとき、「ここ」だけ確かな意味を持つことができるだろうか。

2　透視図法から射影幾何学へ

ａ　透視図法の基本

ルネサンス期のピエロ・デッラ・フランチェスカによる透視図法論から、デザルグを経て射影幾何学が生まれる。この、透視図法から射影幾何学への過程をたどる。以前、透視図法の基本である「正規の作図法」について考えた[22]。この図法はこれからの議論の基礎になるので、ここで素描しておく。

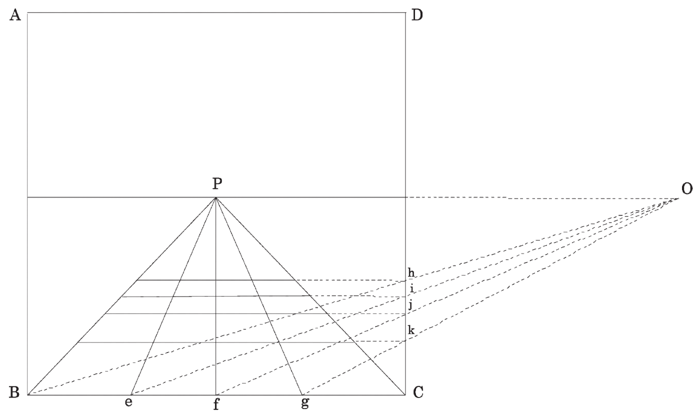
人文主義者で建築家のアルベルティ（Leon　Battista　Alberti, 1404-1472）は『絵画論、*Della Pittura*』(1435）を著した。第一巻には、残っているものとしては最も古い透視図法論がある。ここで、ユークリッドに由来する「視覚のピラミッド」が出てくる。

ピラミッドとは、その底辺から上に引かれたすべての直線が唯一点に終わる［集まる］一

つの立体である。このピラミッドの底辺は見られる面の一つである。（同、十五頁）

中心光線とは、直接にその量にあたり、かつ両側にある各々の角が他の角に等しいように角度を作る唯一の光線である。これは他のすべての光線の中で最も強健で、最も活発であり、いかなる量もこの光線に当たる時ほど大きく見えることはないという働きをする[23]。

アルベルティは一つの透視図法を提案する。図法は後世、「正規の作図法」（Costruzione legittima）と呼ばれた。ベネデッティが16世紀末、三次元的にこの透視図の原理を説明するまでは、なぜ、これがうまく行くかについて、説明はなかった。



ABCD は画面正面（「開いた窓」）である。この画面に、上の図に見られる真四角の石を敷いたような座標がとってあると、これをもとに透視図の絵が描ける。

まず、この底線を、点 e, f, g で等間隔に分割する。分割の単位は画家の身長の三分の一とする。次に、画家の眼から画面へ垂線をおろす。その足が P である。これを中心点 P と呼び、4 点 B, e, f, g, C と結んでおく。次に点 P を通って底線に平行線を引く。この平行線の延長上に点 O を考える。点 O と画面の端、DC の距離は画家の眼と画面の距離に等しく取ってある。ここで、点 O と点 e, f, g を結ぶが、この点線は画家が敷石の上端線を遠くから近くへと見ていくときの視線である。こうして、二つの図が重なることになる。画家が自分の正面に見ている画面と、画家と画面の関係を真横から見た図（側面図）、この二つであり、このとき点 O は画家の眼である（このとき、画面と側面図、そして全体の基面を考えるので、後の図学では「三平面法」と呼ぶ）。これで敷石座標が描ける。

画家は平面で仕事をするから、その仕事の手引きも平面で片付く方がよい。この図はそのような画家の要求に合う。アルベルティは、それまで多くの画家が実際に使ってきた方法を伝えているのであり、幾何学には興味を持っていない。

この図法は画家の眼と画布の関係を絵に取り込む。作図は中心点 P から始まり、視点 O と画面からの距離が大切である。点 P は、底線の各点から延びる平行線が無限のかなた（水平

線）で一点に交わって消えるので、消点とも呼ばれる。

b　視点、消点

ユークリッド『視覚論』、ピエロの『絵画の透視図法論』の基礎的図解、そしてベネデッティによる透視図の三次元図解、これらの視点の描き方を見てみよう。

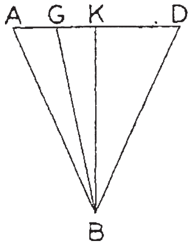


図１

ユークリッド『視覚論』の第一図である。点Ｂが視点であり、直線ADが対象を、BA、BG、BK、BDが各々、対象へと向かう視線を表す。図は一つの対象を見るには、視線による早い走査が必要であることを言う[24]。

図２は、ピエロ・デッラ・フランチェスカ、*De prospective pingendi*、『絵画の透視図論』の第十三図である。見づらいが、この図の左端が点Ａで、視点を表す。点Ａから五本の直線が出ている。点Ａの右にある垂線FBは画面を表す。右半分を占める四辺形FBCGのなかに、視点Ａと同じ高さに、消点Ａが描かれている。ここに、先に見た正規の作図法が見て取られる[25]。

ピエロはユークリッドによる光の流出説を採る（第一巻命題三十）。しかし幾何図では、流出説、流入説、どちらでも同じになる。アルハセンの批判にもかかわらず、近代に至るまで流出説が残った一つの理由である。

ユークリッドの示す図は二次元である。同じく平面上で行われていた当時の透視図技法を、ベネデッティは三次元図で説明した。*De rationibus operationum perspectivae*（「透視図法適応の原理について」、1585）である[26]。大きいＢの文字は扱われる問題の順を表す。

図４の上の「SVPERFICIALIS」は平面図、図３上の「CORPOREA」は立体図の意味であり、両者を対応させるのがベネデッティの方法である。図４平面図は、qdauという四辺形を画面ixに描くときの図で、アルベルティやピエロに見た正規の作図法の一種が、ここにも

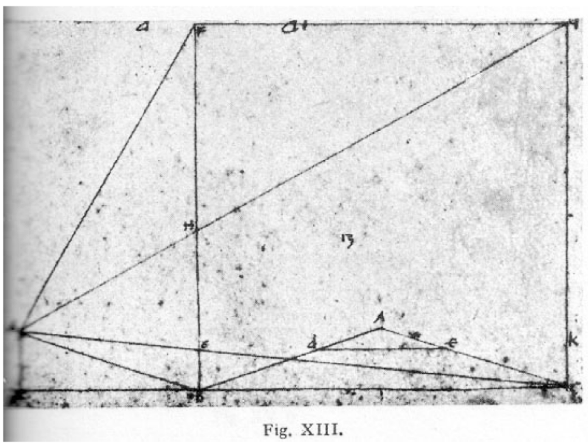


図２

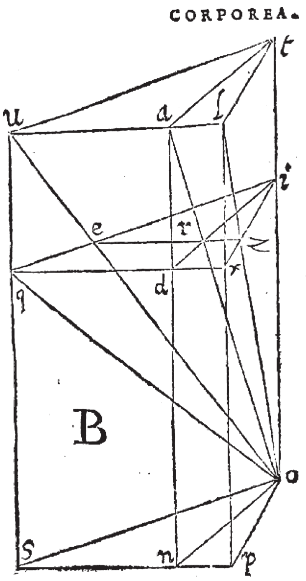


図 3

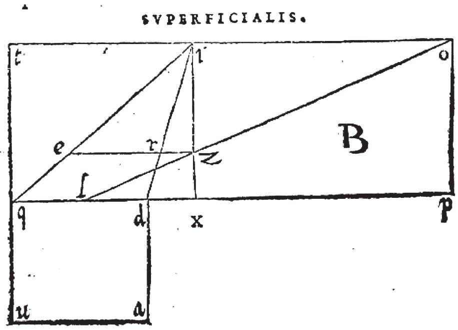


図 4

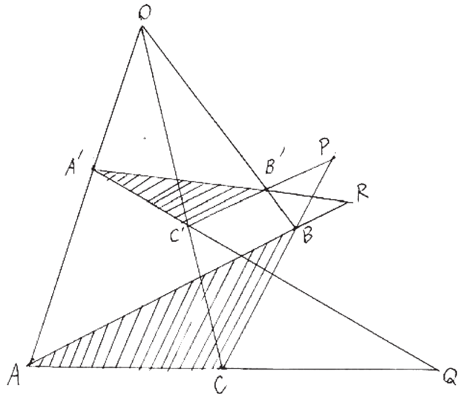
見られる。点 O が視点、i が消点、そして qdre が描かれる四辺形である。立体図は平面図の操作を下から見上げる形になる。対応する符号を追って図を見れば、平面図のやり方が正しいと分かる。この視覚的な証明で十分であるが、ベネデッティはユークリッド幾何学による証明も行っている。

この視覚的証明に、射影幾何学の萌芽がある。ユークリッド幾何学の証明は平行や等長を言いながら結果に至る。一方、この三次元図では、計量的概念は必要ではなく、ただ見るだけ、言い換えれば、直線上の点と点の対応関係だけが見て取られたら終わりである。透視図を前にした、計量から点対応への移行はデザルグ幾何学への一歩と考えられる。

c　デザルグの定理

デザルグから始まる新しい幾何学は、射影幾何学として19世紀に完成される。この幾何学の基本であるデザルグの定理を示す。

「二つの三角形は O を介して中心配景ならば軸配景でもあり、逆も成り立つ」。言い換えれば「二つの三角形 ABC と A’ B’ C’ の対応する頂点を結ぶ直線 AA’、BB’、CC’が、一点 O で交わるなら、対応する辺 AB と A’B’、AC と A’C’、BC と B’ C’ の三つの交点は一直線 QRP を成す。逆も真である」。



図示 1

射影的な証明はまず、三次元で行うが、ここでは省略する。二次元で成立することは、三次元の証明を利用し、少し手が込んでいる。しかし、ここでユークリッドのように視線を幾何学的直線と前提すれば、この三次元図を二次元図に見立てられる。すると、この定理はそのまま成り立っていることが、直に見て取れるはずである。

射影幾何学のテキストの多くは、この定理をまず、二次元で証明する。このとき、メネラウスの定理が使われる。この定理は長さに関するもの、つまり計量的である。また、この定理の証明には平行線に関する定理が必要だが、平行線は同位角など、角度の等しいこと抜きで完全には語れない。つまり平行線の存在は計量的である。このことも、射影幾何学の性格と合わない。

テキストがユークリッド空間を使いながら射影空間を導入するのは、計量に基づく解析的な方法が明快だからである。デザルグ自身、対合定理などでメネラウスの定理をよく使う。しかし、デザルグの定理は、直線上の点が他の直線上の点と或る対応関係にあるとき、他にどのような点対応の関係が生じるかを述べる。ここには計量性はない。このことは、計量の幾何学であるユークリッドに対する、射影幾何学の基本性格である。

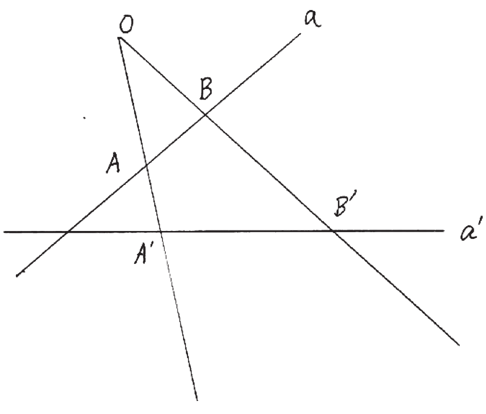
この定理で、点Oを中心とする、O—A’ B’ C’, O—ABC という三角錐は、視覚が包み込む範囲を指すユークリッドの視覚円錐、あるいは、アルベルティの視覚のピラミッドを作っている[27]。つまり、O 点を視点として三角形 ABC を見ると、三角形 A’ B’ C’と完全に重なっている。このO点が頂点となる錐体の三面に一辺ずつ三辺を持つ三角形は、その意味で、すべて同一である。射影幾何学の基本であるこの定理は、このように、視覚と関わらせることができる。

d　配景変換と視点

デザルグの定理に描かれる三角形 ABC と三角形 A’ B’ C’ は、点 O によって中心配景の関係にあると言う。二次元射影空間では、配景という射影幾何学の基本となる関係が、以下のように簡潔に表現される。

「一つの点 O を中心として、直線 a を直線 a’ に、a 上の点、A, B,...を、a’ 上の点、A’, B’,... と直線で結ぶようにして移すとき、この操作を配景変換という」。

この配景変換を重ねる、つまりその積を作ることを射影変換という。



図示 2

デザルグは無限遠点を空間に導入する。これはケプラーが、楕円、放物線、双曲線を二次曲線として一つにくくるとき、無限遠点を導入し

たことに由来する[28]。こうすれば、デザルグの定理は二つの三角形の辺が平行の時でも成り立つ。すべての二直線が無限遠点で交わるからである。

平行線は幾何学でいつも問題であった。たとえば、「二点を通る直線はただ一つである」。これは「二つの直線は一点で交わる」と対の表現になっている。ただし、直線が平行でない限り、という条件で。また、定理が直線に関するもので、直線が交わることが前提になっていると（たとえばパッポスの定理）、その定理は平行線を例外とするときがある。

一般化という数学の基本性格からして、一平面上の二直線はいつも交わる方が望ましい。デザルグの無限遠点によって、射影空間では平行線は存在しない。しかし、射影空間は、ユークリッド空間にただ無限遠点が加わっただけの空間ではない。

まず、直線の方向が、その直線上の無限遠点で示されることになる。この直線と平行な直線、つまり方向を同じくする直線は同一の無限遠点で交わるからである。さらに、方向の同一性が定まることで、射影空間は方位空間となる。

一方、ユークリッド空間では平行線は交わらない。したがって、この空間は方位を表現しない。すると、この空間中の図形を構成するどの辺も方向を持たない。この方向を言うには、デカルト座標のような原点と向きを持った軸組織をこの空間に持ち込まねばならない。その上で、私たちは生活の空間で親しんでいる物の形を、ユークリッド的対象に重ねて考えているのである。ユークリッド幾何学は、形を語る以上、方位空間の中にあって、この方位を度外視しながら計量に集中するような、物の制作の幾何学と言える。

配景変換の場に、透視図法論で描かれる視点は現れるのだろうか。まず、この変換の中心を透視図の視点に当たると考えたくなる。現に、多くの射影テキストは、視点とこの中心を重ねた図から始まる[29]。しかしこれでは、射影的加算の定義など、射影の操作がうまく説明できない。

正規の透視図法からピエロとベネデッティの透視図を見たが、視点に応じて同一直線上に消点が描かれていた。正規透視図のOとP、ピエロのAと（四辺形内の）A、そしてベネデッティではOとiである。

そこで、こう考えてみよう。射影空間には無限遠点、その集合である一つの無限遠直線がある。任意の直線a上の点Pから、直線をたどって無限遠直線に至り、点Qで交わるとすると、この無限遠点Qで、直線は点Pに還ることになる。なぜなら、点Pから逆の方向へと直線を移動しても同一の無限遠直線上の同一の点で交わるからである（二直線は一点で交わる）。つまりここには、直線上の連続した円環的移動が考えられる。

消点やその集まりである水平線が描かれる透視図法も、画面上、平行線が交わることで射影空間と考えられる。すると、視点と消点は上の点P、Qと同じく、射影的に同一点であり、画面の方位による統一は、視点のいわば無限対応点である消点による。

配景変換の中心点は、この消点と考えることが出来る。図示2の変換で、点Oは透視図で

言えば、画面の手前にある視点ではなく、消点である。消点Ｏは、対象である点 A, B と A’, B’ の対応を示している。配景変換はこのように、視点と対象の関係ではなく、対象どうしの関係による空間の統一を表現することになる。

視点の無限遠対応である消点で視覚の統一を表現する透視図から、消点を中心点とし、対象を直線上の点に簡素化する射影幾何学が生まれる。そして、ユークリッド幾何学からは独立に、一つの公理系を作る。ユークリッド『視覚論』は視覚の公理体系への初めて試みであった。すなわち、私たちの視覚は、レンズの屈折や眼の仕組みなど、経験科学の対象でもあるが、より基本的には、数と同じく、一つの演繹体系を成す。

私たちは経験と訓練を経なければ数をこなせないが、このことは、数体系が経験の産物であることを意味しない。透視図法や幾何学も、見るという経験が欠かせない。しかし図法や射影幾何学は、見る経験がそこを外れることのない法則である。

e　カント空間へ

透視図法論の空間はユークリッド空間であり、方位空間ではない。つまり、この空間は、それ自体で存在する実体としての対象を、言い換えれば、どこから見られたのでもない対象を想定している（たとえば、直方体そのもの）。その対象は画家がここから見て、はじめて方位を持った姿として現れ、画家はこの姿を描くとされる。

しかし、射影空間のなかの対象は、はじめから方位のなかにあって向きを持つ。本来の形と、見られた姿との区別は消えている。配景変換によって関係づけられる二つの直線は、どちらが本来でも見え姿でもない。

『屈折光学』から魂を外してみよう。すると、実体としての対象を想定し、その対象と視覚の、脳を介する因果関係を語る現代の視覚論になる。これは射影空間を念頭に、二つの点で退けられる。

まず、視覚の透視図的法則は経験的ではない。幾何学の法則に従う。この法則性によって、視覚は脳の働きの結果としては説明できない。たとえば、算術で、一足す一が二になることは脳の働きではない。もし、これが脳の働きの結果というなら「脳の構造が変われば一足す一が三になるかも知れない」という文が意味を持つことになる。しかし、この仮定法に意味を認めることは、私たちがこのように考えていることの基礎に変更を認めることであり、思考そのものが成立しなくなる(30)。計算には脳が欠かせない。しかしこのことは、算術の法則が脳の産物になることではない。

デカルトとカントはともに、力や色、堅さなどを物体から切り離していき、延長と形はどう考えても残ることから、これを物体に欠かせない性質とした。これにならって、物体から方位を除けるか、努めて考えてみよう。ここを欠く、どこからでもない物の形を思うことができるだろうか。想像不可能な光景なら幾通りもある。たとえば、幅十センチで長さ百キロの平行線

も、その全体を視覚的には想像できない。しかし、その意味は了解される。一方、「どこからのでもない三角錐の一つの形」や「どこからのでもある立方体の一つの形」に意味を与えることは出来ない。すなわち、それ自体で存在する対象、実体は意味を成さない。

カントには視覚論がない。代わりにカントは、『純粋理性批判』のはじめで空間を語る。

> 私たちは外官（私たちの心の特性の一つ）により、対象を私たちの外に、つまり、すべてを空間のなかに表象する。空間のなかで、対象の形、大きさ、そして互いの関係が規定されるか、規定できる。（『純粋理性批判』B37、超越論的感性論の第一節「空間について」出だし）

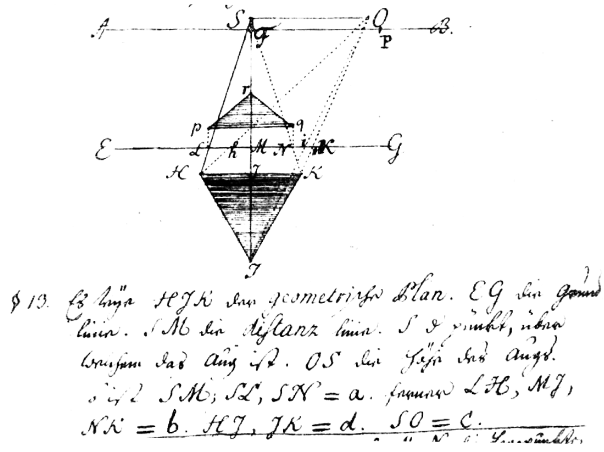
「空間のなかで、対象の形、………が規定できる」。すなわち、対象の大きさや形は、ここにいる私の判断によって与えられるのではなく、「空間のなかで」規定されているのである。

このとき、空間は方位を持ち、対象は向きを、そうして形を持つ。デカルト空間では私のいる場所、限られた空間である「ここ」は、空間自体の性質となる。対象は私の知覚によることなく表象であり、空間は私をまつことなく「ここ性」を持つ。

アルハセンからデカルトに至る視覚論は透視図法で表現されるが、この図法はユークリッド空間を前提する。デカルトの観念論を斥けるカント、そして非ユークリッド幾何を始める射影幾何学、ともにその要は、方位空間をユークリッド空間に代えることにある。

おわりに

これは、ランベルト（J. H. Lambert, 1728-1777）の透視図法についての手稿である[(31)]。少し見にくいが三次元図である。S 点を視点とする。OS は視点と同じ高さにとられており「正



規の作図法」に関連していることが分かる。カントの知人であったこの数学者の仕事は多岐にわたるが、非ユークリッド幾何学の開発と透視図法論が含まれる。

当時、ランベンルトを一つの頂点として、おびただしい透視図法論が出回っていた。多くは建築、都市計画など、実用に向けられている。写真術が現れ、事情は一変した。今はあまり目にすることのない、このような著作に、カントは日頃、親しんでいたと思われる。ランベルトとデザルグ幾何学の関係について、J. V. Field が語っているが(32)、その透視図法論とカント空間の関係については、文献を目にしたことがない。が、ランベルトの *Die Freye Perspetive*, （自由透視図法）、1759−1774は、カントの批判期と近い。

また、この論文では射影幾何学の基礎部分しか扱っていない。公理化の過程や加算の定義、ケーリーによるユークリッド的計量の導入、そして極の考え方など、詳論すべきことが残されている。ランベルトとあわせて、課題としたい。

〔注〕

(1) 「透視図法とカント空間」、『文学部論集』第90号所収、2006年３月

(2) *The Arabic Version of Euclid's Optics*, Vol. 1, Elaheh Kheirandish, in *Sources in the History of Mathematics and Physical Sciences*, 16, Springer, 1998

(3) この訳はアラビア文化圏でユークリッドがどのように変容したかも語る。たとえばこの定義でも、４，５，７が従来知られている *Optica* と異なる。アラビア版の４，５，７はまとめて４でくくられ、６は従来の版では７に当たる。アラビア版では、視線の高低と左右視が省かれている。

(4) 『ティマイオス』（*Timaeus*, c. 350B. C.）、45B-E、種山恭子訳、『プラトン全集』12、岩波書店、1975

(5) *The Optics of Ibn al-Haytham*, Book Ⅰ−Ⅲ on Direct Vision, A. I. Sabra, London, Warburg Institute, 1989

(6) *Alhacen's Theory of Visual Perception*, 2001, A. Mark Smith, American Philosophical Society, 2001.　Smith はこの翻訳の解説で、一貫して Alhacen と Ibn al-Haytham を使い分ける。Alhacen はラテン語訳に現れる視覚論を、Ibn al-Haytham は Sabra 版の視覚論を、それぞれ語るときである。Smith はこれによって、ラテン版に見られるアリストテレス的読み込みを示す。

(7) この点については、上記 Mark Smith の vol. 1, Preface, p. x

(8) 点状分析については、D. Lindberg の論文、Alhazen's Theory of Vision and Its Reception in the West, Isis, vol. 58, part 3, No. 193, 1969. また同じ著者で *Theory of Vision-From Al-kindi to Kepler*, ch. 4, The Unversity of Chicago Press, 1976. Al-kindi の理論については同書 ch. 2.

(9) ただし、アルハセンは光を直線で表しながら、この直線を物理的なもの、現実のものとはしていない。アルハセンにとって、この直線は光の行動の数学的表現である。アルハセンの議論は上記 M. Smith 版、Book One, ch. 7, ［6.12］−［6.26］, vol. 2, pp. 358−363

(10) Alhacen, Book Two, ch. 2, ［2.6］,［2.7］, vol. 2, p. 419. また、Lindberg の *Theory of Vision*, pp. 75−80

(11) Alhacen, Book One, ch. 7, ［6−58］−［6−59］, vol. 2, pp. 373−374

(12) *Roger Bacon and the Origins of Perspectiva in the Middle Ages*, p. 101, D. Lindberg, Oxford U. P., 1996

(13) ベイコンについては『ロジャー・ベイコン』、『科学の名著』３、朝日出版、1980.
高橋憲一による詳細な分析がある。

⒁　ベイコンの species とアルハセンの forma の区別については、Smith 版 Alhacen, p. Lxxxvii
⒂　同上、ch. 5, 2 The Means of Vision
⒃　『哲学の原理』、第三部「可視的世界について」、および小林道夫「解説」第 3 章 4 、『科学の名著』第 7 巻、朝日出版社、1988. *Descartes' s Theory of Light and Vision: A Discourse on method*, pp. 13-19, A. Mark Smith, American Philosophical Society, 1987
⒄　『屈折光学』、『デカルト著作集』 1 、p. 139、青木靖三・水野和久訳、白水社、1973
⒅　同上、p. 147
⒆　同上、pp. 150-153
⒇　*Roger Bacon and the Origins of Perspectiva in the Middle Ages*, pp. 222-233
(21)　Alhacen, M. Smith 版、vol. 2, pp. 435-437, pp. 481-485,　pp. 483-484
(22)　「透視図法とカント空間」、pp. 14-17
(23)　アルベルティ『絵画論』、三輪福松訳、p. 16、中央公論美術社、1993
(24)　*The Optics of Euclid*, Journal of the Optical Society of America, Vol. 35, Nr. 5, p. 357, 1945
(25)　*De prospectiva pingend*, Nicco Fasola によって編集され、一九四二年にフィレンツエで刊行された。一九八四年に再版が出ている。この版に収録されている図の13番目である。
(26)　*De rationibus operationum perspectivae*, Turin, 1585, p. 122, British Library, shelf mark 531. n. 14
(27)　アルベルティ『絵画論』、pp. 14-20
(28)　「透視図法とカント空間」、pp. 26-27.　*The Invention of Infinity*, J. V. Field, pp. 183-187, Oxford U. P., 1997
(29)　たとえば、J. V. Field, *The Invention of Infinity*, p. 201, Oxford, 1997
(30)　反事実仮定法と呼ばれる条件文の正当性の吟味は、*Causation and Condition*, Oxford Readinds in Philosophy, 1980　*Conditionals*, Oxford Readinds in Philosophy, 1991, *On Conditionals*, Cambridge U. P., 1986, など論文集がある。また、『ライプニッツの哲学』、第八章「仮定的真理」、石黒ひで、岩波書店、2003年版
(31)　*Shriften zur Perspektive*, eingeleitet von Max Steck, Dr. Geog Lüttke Verlag, Berlin, 1943. この書はナチス政権崩壊直前に出版されている。ランベルトの透視図論すべてを納めた大冊であり、661の詳細な注など、Max Steck の分析は徹底している。引用した図は164頁と165頁の間にある。
(32)　*The Geometrical Work of Girard Desargues*, J. V. Field & J. J. Gray, pp. 41-42, Springer Verlag, 1987.　デザルグの定理については pp. 144-169。

〔参考文献〕

1　『射影幾何学』上下二巻、グーリエビッチ、東京図書、1962
2　『射影幾何学』、彌永昌吉　平野鉄太郎、朝倉書店、1959
3　『射影幾何』、福原満州雄、実教出版社、1985
4　*Brook Taylor's Work on Linear Perspective*, K. Andersen, in *Sources in the History of Mathematics and Physical Sciences*, 10, Springer, 1992
5　Die Perspektive als "symbolische Form", Erwin Panofsky, in *Aufsätze zu Grundfragen der Kunstwissenschaft*, Wissenschaftsverlag Volker Spiess, Berlin, 1998

〔付記〕

この論文は、2008年度研修の成果である。

（たやま　れいし　仏教学科）

2010年10月12日受理